数理解析研究所講究録
1005巻 1997年 103-118

Macdonald 対称多項式の昇降演算子

野海 正俊 神戸大学・理学部

序.

Jack 多項式、Macdonald 多項式は、コンパクト Riemann 対称空間やその量子化の球函数として現われる対称多項式であり、古典的な超幾何型直交多項式である (q) 超球多項式 (Gegenbauer 多項式) の自然な多変数化である。このような直交多項式の昇降関係、隣接関係を記述することは、多変数の特殊函数論において基本的な問題の一つである。これらの多項式は、Calogero-Sutherland の量子多体系の励起状態を表わす直交多項式でもあり、その観点からも生成消滅を記述する演算子の代数構造を明らかにすることは基本的な問題であろう。最近の affine Hecke 環からのアプローチ (Macdonald-Cherednik 理論) を媒体として、この意味の対称性の記述の問題に対しても、新しい展望が開けつつある。この論説では、Lapointe-Vinet [LV1,2], Kirillov-Noumi [KN1,2] による、Jack 対称多項式および Macdonald 対称多項式に対する「列型の」昇降演算子 (生成消滅演算子) について紹介したい。この種の演算子の代数構造についてはまだよく解っていないが、それを解明することは今後の課題である。ここで考察する Jack 対称多項式、Macdonald 対称多項式は A 型のルート系に付随するものである。ほかのルート系の場合の昇降演算子は未だ知られていない。

以下では Macdonald 対称多項式を中心に議論を進め、その $q\to 1$ での極限として Jack 対称多項式にも言及する。

§1: Macdonald 対称多項式.

Macdonald 対称多項式に関連する標準的な記号や、基本的な事実については、昨年出版された Macdonald の本 [Ma] を参照してほしい。ここでは、以下の議論に必要な範囲で、簡単に復習する。

$\mathbb{K}=\mathbb{Q}(q,t)$ を q,t の有理函数体として、n 個の変数 $x=(x_1,\dots,x_n)$ をもつ多項式環 $\mathbb{K}[x]=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ を考えよう。n 次の対称群 $W=\mathfrak{S}_n$ が自然に作用しているので、その不変式環を $\mathbb{K}[x]^W$ で表わす。Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x)=P_\lambda(x;q,t)$ は、長さ n 以下の分割 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ ($\lambda_i\in\mathbb{Z}$, $\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_n\ge 0$) で添字付けられた同次多項式の族であり、不変式環 $\mathbb{K}[x]^W$ の $\mathbb{K}$ 基底をなす。以下の議論で重要なことは、この多項式がある q 差分作用素の可換族の同時固有函数となることである。

$r=0,1,\dots,n$ に対して、q-差分作用素 D_r を次のように定義する:

$$D_r = t^{\binom{r}{2}} \sum_{\substack{I\subset[1,n]\\ |I|=r}} \prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i\in I} T_{q,x_i}. \tag{1.1}$$

ここで T_{q,x_i} は変数 x_i に関する q シフトの作用素 $x_j \to q^{\delta_{ij}} x_j$ であり、(1.1) 式の和は、整数の区間 $[1,n]=\{1,2,\dots,n\}$ の部分集合 I で r 個の元からなるものの全体をわたる。特に $D_0=1$, $D_n = t^{\binom{n}{2}} T_{q,x_1}\cdots T_{q,x_n}$. D_1 は

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i} \tag{1.2}$$

である。この q 差分作用素の族 $D_0,\dots,D_n$ は、パラメータ u を導入して母函数

$$D_x(u) = \sum_{r=0}^{n} (-u)^r D_r \tag{1.3}$$

の形で考えると都合の良いことが多い。こうおくと、$D_x(u)$ が次のような行列式表示をもつことがわかる:

$$\begin{aligned} D_x(u) &= \frac{1}{\Delta(x)} \det\left(x_j^{n-i}(1-ut^{n-i}T_{q,x_j})\right)_{1\le i,j\le n} \\ &= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{w\in W} \epsilon(w) w.\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{n-i}(1-ut^{n-i}T_{q,x_i}) \right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで、$\Delta(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)$ は変数 $x_1,\dots,x_n$ の差積、$\epsilon(w)$ は置換の符号を表わす。

上で定義した D_r $(0\le r\le n)$ は W 不変な q 差分作用素で互いに可換であり、対称多項式環 $\mathbb{K}[x]^W$ をそれ自身に移す。(可換性は $[D_x(u),D_x(v)]=0$ が成立することといってもよい。D_r 全てが多項式環 $\mathbb{K}[x]$ 自身を保つわけではないので注意が必要である。) これらの作用素を同時に対角化するのが Macdonald 対称多項式である。Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x)$ は次の q 差分方程式を満たす: 任意の分割 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ に対して

$$D_x(u)P_\lambda(x) = P_\lambda(x)\prod_{i=1}^{n}(1-uq^{\lambda_i}t^{n-i}). \tag{1.5}$$

$P_\lambda(x)$ は、単項式型の対称函数 $m_\mu(x)$ による展開について次の三角性をもつことも注意しておこう。

$$P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu(x) \quad (u_{\lambda\mu}\in\mathbb{K}=\mathbb{Q}(q,t)). \tag{1.6}$$

ここで、$\leq$ は dominance odrer と呼ばれる分割の半順序である。特に $P_\lambda(x)$ は同次対称多項式で、その次数は λ に対応する Young 図形の箱の個数 $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ である。Macdonald 対称多項式 $P_\lambda(x)$ は上記の条件 (1.5) と (1.6) で一意に定まる。状況によっては、「整形式」と呼ばれる別の正規化 $J_\lambda(x) = J_\lambda(x; q, t)$ を用いるほうが良いこともある:

$$J_\lambda(x) = c_\lambda P_\lambda(x), \quad c_\lambda = \prod_{s\in\lambda}(1 - q^{a(s)}t^{\ell(s)+1}). \tag{1.7}$$

ここで $\ell(s) = \lambda'_j - i$, $a(s) = \lambda_i - j$ は、λ に対応する Young 図形内の箱 $s = (i, j) \in \lambda$ それぞれに対して決まる量で、脚長、腕長と呼ばれるものである([Ma], (VI.6.19))。このように正規化すると、「任意の $J_\lambda(x)$ が単項式型対称函数の $\mathbb{Z}[q, t]$ 係数の 1 次結合になるようだ」というのが [Ma] (VI.8) にあるMacdonald の予想 (の一部) であったが、現在までに何とおりかの方法でこの予想が正しいことが証明されている。この論説の列型昇降演算子を用いる方法がその一つで、これについては後で言及する。

Macdonald 対称多項式の直交性やその他の基本的な性質については、[Ma] を見て頂くことにして、ここでは母函数 (一種の再生核) のことを復習しておこう。もう 1 組の変数 $y = (y_1, \ldots, y_m)$ を用意して、函数 $\Pi(x, y) = \Pi(x, y; q, t)$ を

$$\Pi(x, y) = \prod_{\substack{i\in[1,n]\\ j\in[1,m]}} \frac{(tx_iy_j; q)_\infty}{(x_iy_j; q)_\infty}, \tag{1.8}$$

で定義する。ここで標準的な無限積の記号 $(x; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - xq^k)$ を用いた。この種の無限積の収束は、適当な変数について形式巾級数の意味で考えてもよいし、q が $|q| < 1$ なる複素数のときは正則函数の無限積の収束と考えればよい。今 $m \leq n$ とすると、$\Pi(x, y)$ は、x 変数と y 変数の両方の Macdonald 対称多項式を用いて次のように展開される。

$$\Pi(x, y) = \sum_{\ell(\lambda)\leq m} b_\lambda P_\lambda(x) P_\lambda(y) \quad (b_\lambda \in \mathbb{K}). \tag{1.9}$$

ここで和は、長さ m 以下の分割 λ 全体をわたる無限和である。この展開の係数 b_λ は

$$b_\lambda = \prod_{s\in\lambda} \frac{1 - q^{a(s)}t^{\ell(s)+1}}{1 - q^{a(s)+1}t^{\ell(s)}}. \tag{1.10}$$

で与えられることも知られている ([Ma])。(b_λ を決定することも決して容易ではない。)

Jack 対称多項式と Macdonald 対称多項式の関係は次のようになっている。Macdonald の場合は 2 個のパラメータ (q, t) を含み、Jack の場合は 1 個のパラメータ α (または $\beta = 1/\alpha$) を含む。Macdonald から Jack へ移行するには、q, t を $q = t^\alpha$ とスケーリングして $t \to 1$ (または $t = q^\beta$ とおいて$q \to 1$) なる極限をとる — というのが基本である。α

でなく β を Jack 対称多項式のパラメータにとる方が便利なことも多いが、今は Macdonald [Ma] の記号を尊重して α を使うことにして

$$(1.11)\qquad J_\lambda^{(\alpha)}(x) = c_\lambda^{(\alpha)} m_\lambda(x) + (\text{dominance order で低いの項の和})$$

と正規化した Jack 対称函数を考える。但し $c_\lambda^{(\alpha)} = \prod_{s\in\lambda}(a(s)\alpha + \ell(s) + 1)$. このとき

$$(1.12)\qquad J_\lambda^{(\alpha)}(x) = \lim_{t\to 1} \frac{1}{(1-t)^{|\lambda|}} J_\lambda(x; t^\alpha, t)$$

が成立する。(1.4) の q 差分作用素は、母函数のパラメータもスケールし直して極限

$$(1.13)\qquad L(s) = \lim_{\substack{q=t^\alpha \\ t\to 1}} \frac{1}{(1-t)^n} D_x(t^s)$$

をとれば、微分作用素

$$(1.14)\qquad L(s) = \frac{1}{\Delta(x)} \det(x_j^{n-i}(s + \alpha x_j \partial_{x_j} + n - i))_{1\le i,j\le n}$$

に移行する。但し $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$. これについて、Jack 対称多項式は

$$(1.15)\qquad L(s) J_\lambda^{(\alpha)}(x) = J_\lambda^{(\alpha)}(x) \prod_{i=1}^n (s + \lambda_i \alpha + n - i)$$

なる微分方程式を満たす。(1.14) の微分作用素を $L(s) = \sum_{r=0}^n s^{n-r} L_r$ と展開すれば、L_r $(r = 0, 1, \dots, n)$ は互いに可換で、各 L_r は

$$(1.16)\qquad L_r = \alpha^r e_r(x_1\partial_{x_1}, \dots, x_n\partial_{x_n}) + (\text{低階の項})$$

の形の対称 (W 不変) 微分作用素となる (但し e_r は r 次の基本対称式)。

この L_r $(r = 0, 1, \dots, n)$ が関口次郎氏による微分作用素の可換族であり、A 型の対称空間 G/K の球函数の微分方程式系で幾何学的パラメータを連続化したものにほかならない。実際 $\alpha = 2$ が GL_n/SO_n の, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ が GL_{2n}/Sp_{2n} の帯球函数の微分方程式に対応する。パラメータがこの値の Jack 対称多項式は G の有限次元表現に付随する G/K の帯球函数の動径成分である。($\alpha = 1$ は Schur 函数。$\alpha = 2$ のものは zonal 多項式とも呼ばれる。) なお、Macdonald 対称多項式についても、量子群の枠組みで同様の「幾何学的」解釈ができることが知られている [N1]。

今 $H_2 = L_1^2 - 2L_2$ とおくと、$\alpha^2 \sum_{i=1}^n (x_j\partial_{x_j})^2$ を主部にもつ 2 階の微分作用素が得られる。これを差積の巾で変換すると

$$(1.17)\qquad H_{\mathrm{CS}} = \Delta(x)^{1/\alpha} H_2 \Delta(x)^{-1/\alpha} = \alpha^2 \sum_{j=1}^n (x_j\partial_{x_j})^2 + 2\alpha(\alpha-1) \sum_{i<j} \frac{x_i x_j}{(x_i - x_j)^2}$$

となる。座標 $x_j = e^{\sqrt{-1}\theta_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ で見ると、H_{CS} は単位円周上の量子多体系である Calogero-Sutherland 模型の Hamiltonian にほかならない。この文脈では、$\psi_0(x) = \Delta(x)^{1/\alpha}$ を基底状態としたときの励起状態 $\psi_\lambda(x) = \psi_0(x) J_\lambda^{(\alpha)}(x)$ を表わすのが Jack 対称多項式となる訳である。

なお Jack 対称多項式の場合の母函数 (1.8) は

$$\Pi^{(\alpha)}(x, y) = \prod_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,m]}} \frac{1}{(1 - x_i y_j)^{1/\alpha}}. \tag{1.18}$$

(1.9) に対応する展開は

$$\Pi^{(\alpha)}(x, y) = \sum_{\ell(\lambda) \le m} b_\lambda^{(\alpha)} P_\lambda^{(\alpha)}(x) P_\lambda^{(\alpha)}(y) \tag{1.19}$$

となる。ここで

$$b_\lambda^{(\alpha)} = \prod_{s \in \lambda} \frac{a(s)\alpha + \ell(s) + 1}{(a(s)+1)\alpha + \ell(s)}, \quad P_\lambda^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{c_\lambda^{(\alpha)}} J_\lambda^{(\alpha)}(x) = \lim_{t \to 1} P_\lambda(x; t^\alpha, t) \tag{1.20}$$

なる記号を用いた。三町勝久・山田泰彦両氏の仕事 [MY]で、Jack 対称多項式が Virasoro 代数の特異ベクトルを表わすことが知られている。そのときの特異ベクトル (または Jack 対称多項式) の Selberg 型積分表示も、この母函数 (1.19) と密接な関係があることを注意しておこう。また、Macdonald 対称多項式と q-Virasoro 代数の関係を論じた粟田英資氏らの最近の仕事もある。

§2: 列型の昇降演算子.

各 $m = 0, 1, \ldots, n$ に対し、作用素 $B_m : \mathbb{K}[x]^W \to \mathbb{K}[x]^W$ であって、次の性質を持つものを構成することを考えよう: 長さ m 以下の任意の分割 λ に対して

$$B_m . J_\lambda(x) = J_{\lambda + (1^m)}(x). \tag{2.1}$$

ここで $(1^m) = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 が m 個) は m 個の箱からなる縦 1 列の Young 図形に対応する分割である。このような作用素 B_m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ が構成できれば、任意の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ に対応する Macdonald 対称多項式 $J_\lambda(x)$ が自明な $J_0(x) = 1$ から出発して B_m 達を順次作用させて得られることになる。すなわち

$$J_\lambda(x) = (B_n)^{\lambda_n} (B_{n-1})^{\lambda_{n-1} - \lambda_n} \cdots (B_1)^{\lambda_1 - \lambda_2} . 1 \tag{2.2}$$

あるいは、λ に共役な分割 $\lambda' = \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ $(\mu_1 \ge \cdots \mu_s \ge 0)$ を用いて

$$J_\lambda(x) = B_{\mu_1} \cdots B_{\mu_s} . 1 \tag{2.3}$$

となる。このような作用素を「列型の上昇演算子」と呼ぶことにしよう。(2.1) の条件は $\ell(\lambda) \leq m$ なる $J_\lambda(x)$ のみについての条件なので、これだけでは B_m は一意には決まらないことを注意しておく。

このような B_m の一つ系列は次の q 差分作用素で与えられる ([KN2]):

$$B_m = \sum_{\substack{J\subset[1,n]\\|J|=m}} \prod_{j\in J} x_j \sum_{I\subset J} (-t^{m-n+1})^{|I|} t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{\substack{i\in I\\ j\in[1,n]\setminus I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i\in I} T_{q,x_i}. \tag{2.4}$$

例えば $B_0 = 1$, $B_n = x_1\cdots x_n D_x(t)$ で B_1 は

$$B_1 = \sum_{i=1} x_i \left(1 - t^{2-n} \prod_{j\neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i}\right) \tag{2.5}$$

である。この B_m の定義は $x_1, \ldots, x_n$ の順序付けには依存しないので、B_m が W 不変であることは明らかである。一方 B_m に左から差積を掛けると $\Delta(x)B_m$ は多項式係数の q 差分作用素となる。この 2 つの事実から B_m が $\mathbb{K}[x]^W$ を保つことが容易にわかる。(同じ理由で $\mathbb{Z}[q,t^{\pm 1}][x]^W$ を保つことも示せる。)

定理 2.1. 各 $m = 0, 1, \ldots, n$ に対し、上の (2.4) で定義される q 差分作用素 B_m は対称多項式環 $\mathbb{K}[x]^W$ を保つ。さらに、長さ m 以下の任意の分割 λ に対して

$$B_m.J_\lambda(x) = J_{\lambda+(1^m)}(x) \tag{2.1}$$

が成立する。

(2.4) の作用素 B_m が性質 (2.1) をもつことの証明は後にして、ここでは、この作用素に関連したいくつかの注釈を与えておくことにしよう。

最初に B_m もまた (1.4) に類似した表示をもつことに注意する。すなわち

命題 2.2. (2.4) で定義される B_m について

$$B_m = \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{w\in W} \epsilon(w) w. \left(x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n} e_r(X_1^{(m)}, \ldots, X_n^{(m)})\right). \tag{2.6}$$

ここで、$\delta_i = n - i \quad (i = 1, \ldots, n)$. また

$$X_i^{(m)} = x_i(1 - t^{m-i+1} T_{q,x_i}) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.7}$$

で e_m は m 次の基本対称式を表わす。

この表示からだと Jack の場合へ移行できる。実際、q 差分作用素 B_m の極限として決まる微分作用素

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_m &= \lim_{\substack{q=t^\alpha\\ t\to 1}} \frac{1}{(1-t)^m} B_m \\ &= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{w\in W} \epsilon(w) w. \left(x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n} e_r(\mathcal{X}_1^{(m)}, \ldots, \mathcal{X}_n^{(m)})\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

を考えればよい。ここで

$$\mathcal{X}_i^{(m)} = x_i\,(\alpha x_i \partial_{x_i} + m - i + 1) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{2.9}$$

と書いた。このとき、(2.1) の極限として

$$\mathcal{B}_m . J_\lambda^{(\alpha)}(x) = J_{\lambda+(1^m)}^{(\alpha)}(x) \qquad (\ell(\lambda) \le m) \tag{2.10}$$

なる関係式が得られる。

(2.4) の作用素 B_m が $\mathbb{Z}[q,t^{\pm1}][x]^W$ を保つことは既に注意した。この事実と (2.2) または (2.3) の表示を考え合わせると Macdonald 対称多項式 $J_\lambda(x) = J_\lambda(x;q,t)$ 自身が $\mathbb{Z}[q,t^{\pm1}][x]^W$ に属すことが解る。実は、$\mathbb{Z}[q,t][x]^W$ を保ち性質 (2.1) をもつ作用素も構成できるので、$J_\lambda(x)$ は $\mathbb{Z}[q,t][x]^W$ に属すことが解る。このような作用素としては

$$B'_m = \sum_{\substack{J\subset[1,n]\\|J|=m}} \prod_{j\in J} x_j \sum_{I\subset J} (-t)^{m-|I|} t^{\binom{m-|I|}{2}} \prod_{\substack{i\in I\\ j\in[1,n]\setminus I}} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \prod_{j\in[1,n]\setminus I} T_{q,x_j} \tag{2.11}$$

がある。この B'_m よりも前の B_m の方が扱いやすいので (2.4) を先に述べたが q,t についての正則性に関しては B'_m の方が性質がよいという事情になっている。いずれにせよ、各 B'_m は $\mathbb{Z}[q,t][x]^W$ を保ち、しかも等式 $B'_m J_\lambda(x) = J_{\lambda+(1^m)}$ が長さ m 以下の任意の分割 λ に対して成立するので次の定理が従う。

定理 2.3. 任意の分割 λ について *Macdonald* 対称多項式 $J_\lambda(x;q,t)$ は $\mathbb{Z}[q,t]$ 係数の対称多項式環 $\mathbb{Z}[q,t][x]^W$ に属す。すなわち各 $J_\lambda(x;q,t)$ は、単項式型対称函数の $\mathbb{Z}[q,t]$ 係数の線形結合である。

B_m だけでこの定理の証明を完結させたければ、$J_\lambda(x;q,t) \in \mathbb{Z}[q,t^{\pm1}][x]^W$ と Macodnald 対称函数の q, t の入れ替えに関する双対性を用いて $J_\lambda(x;q,t) \in \mathbb{Z}[q,t][x]^W$ を導く方法もある。これについては [KN1] を参照のこと。また定理 2.2 から、いわゆる (q,t) Kostka 係数 $K_{\lambda,\mu}(q,t)$ が $\mathbb{Z}[q,t]$ に属すことも示せる ([KN1,2])。Macdonald [Ma] により $K_{\lambda,\mu}(q,t)$ は q,t の非負整数係数の多項式と予想されているが、これは現時点でも未解決のようである。(定理 2.3 および (q,t)-Kostka 係数の整数性の証明は、何通りか知られている。上のような Kirillov-Noumi によるもの以外に、Knop-Sahi による補完多項式の考え方によるもの、Garsia-Tesler による組合せ論的なもの等々。)

Jack の場合は、(2.8) の表示から微分作用素 $\mathcal{B}_m$ が $\mathbb{Z}[\alpha][x]^W$ を保つことが解る。従って $J_\lambda^{(\alpha)}(x)$ は $\mathbb{Z}[\alpha][x]^W$ に属す。すなわち、$J_\lambda^{(\alpha)}(x)$ は単項式型対称函数の $\mathbb{Z}[\alpha]$ 係数の一次結合である (Lapointe-Vinet [LV1])。Jack 対称多項式に関しては、その係数が α の多項式として非負整数の係数をもつこともその後 Knop-Sahi により示されている。この事実に関しては最近の、中島啓氏による幾何学的証明もある。

今までは「列型の上昇演算子」を考察してきたが、「列型の下降演算子」についても述べておこう。$m=0,1,\dots,n$ に対して q 差分作用素 A_m を

$$A_m=\sum_{\substack{J\subset[1,n]\\|J|=m}}\prod_{j\in J}\frac{1}{x_j}\sum_{I\subset J}(-1)^{|I|}t^{\binom{|I|}{2}}\prod_{\substack{i\in I\\ j\in[1,n]\setminus I}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\prod_{i\in I}T_{q,x_i} \tag{2.12}$$

で定義する。このとき A_m は $\mathbb{K}[x]^W$ を保ち、しかも $\ell(\lambda)\le m$ なる任意の分割 λ に対して

$$A_m.J_\lambda(x)=J_{\lambda-(1^m)}(x)\prod_{i=1}^{m}(1-q^{\lambda_i}t^{m-i})(1-q^{\lambda_i-1}t^{n-i+1}) \tag{2.13}$$

が成立する。特に $\ell(\lambda)<m$ なら $A_m.J_\lambda(x)=0$ である。この作用素の命題 2.2 に対応する表示は

$$A_m=\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{w\in W}\epsilon(w)w\left(x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n}e_m(\Xi_1,\dots,\Xi_n)\right) \tag{2.14}$$

である。ここで

$$\Xi_i=\frac{1}{x_i}(1-t^{n-i}T_{q,x_i})\quad(i=1,\dots,n). \tag{2.15}$$

(2.14) の表示から Jack の場合に移行すると

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_m&=\lim_{\substack{q=t^\alpha\\ t\to1}}\frac{1}{(1-t)^m}A_m\\&=\frac{1}{\Delta(x)}\sum_{w\in W}\epsilon(w)w\left(x_1^{\delta_1}\cdots x_n^{\delta_n}e_m(\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n)\right)\end{aligned} \tag{2.16}$$

なる微分作用素を得る。但し

$$\mathcal{D}_i=\frac{1}{x_i}(\alpha x_i\partial_{x_i}+n-i)\quad(i=1,\dots,n). \tag{2.17}$$

この微分作用素で

$$\mathcal{A}_m.J_\lambda^{(\alpha)}(x)=J_{\lambda-(1^m)}^{(\alpha)}(x)\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i\alpha+m-i)((\lambda_i-1)\alpha+n-i+1) \tag{2.18}$$

が成立する。

この節で述べた列型の昇降演算子について、それらの交換関係が合理的に表現できるか — という問題があるが、これについては現時点では明確な答えがない。もう一つの問題は、これらの昇降演算子が、多項式でない一般の同時固有函数に対しても有効か—ということである。

これについても実はよくわからない。対称多項式に作用する作用素の範疇だけで議論するのは少し無理があるのではないかというのが現在の印象である。これまで考察してきたような微分作用素や q 差分作用素の可換族ではなくて、Dunkl 作用素の可換族の同時固有函数については、この種の議論が可能なことが最近わかってきたが、これについては別の機会に報告したい。

Jack 対称多項式に対する列型上昇演算子は、もともと Lapointe-Vinet [LV1,LV2]によって導入されたものである。但し、彼らは Dunkl 作用素を用いて表示していて、(2.8) のような表示を与えたわけではない。Jack の場合でも、この形の微分作用素を明示したのは [KN2] が最初であろう。

§3: 昇降演算子と行列式表示.

定理 2.1 の証明に入る前に、列型昇降演算子 B_m, A_m に関連した、q 差分作用素の行列式表示を考察する。ここで述べる行列式は $D_x(u)$ の場合の (1.4) の拡張になっているものである。詳しい証明を記す余裕はないので、一般的な証明については直接 [KN2] を見て頂きたい。

q 差分作用素 B_m の定義 (2.4) にパラメータ u を導入して

$$B_m(u) = \sum_{\substack{J\subset[1,n]\\ |J|=m}} \prod_{j\in J} x_j \sum_{I\subset J} (-u)^{|I|} t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{\substack{i\in I\\ j\in[1,n]\setminus I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i\in I} T_{q,x_i}. \tag{3.1}$$

とおく。もとの B_m は $B_m = B_m(t^{m-n+1})$ で回復される。さらにもう一つのパラメータ v を導入して

$$B(u,v) = \sum_{m=0}^{n} B_m(u) v^m \tag{3.2}$$

とおく。A_m についても同様に

$$A_m(u) = \sum_{\substack{J\subset[1,n]\\ |J|=m}} \prod_{j\in J} \frac{1}{x_j} \sum_{I\subset J} (-u)^{|I|} t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{\substack{i\in I\\ j\in[1,n]\setminus I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i\in I} T_{q,x_i} \tag{3.3}$$

を定め ($A_m(1) = A_m$)、さらに

$$A(u,v) = \sum_{m=0}^{n} A_m(u) v^m \tag{3.4}$$

と定義する。このとき

命題 3.1. 上記のように定義した $B(u,v)$, $A(u,v)$ は次の行列式表示を持つ:

$$B(u,v) = \frac{1}{\Delta(x)} \det\Big(x_j^{n-i}(1 + v x_j(1 - u t^{n-i} T_{q,x_j})) \Big)_{1\le i,j\le n}, \tag{3.5}$$

$$A(u,v) = \frac{1}{\Delta(x)} \det\Big(x_j^{n-i}(1 + \frac{v}{x_j}(1 - u t^{n-i} T_{q,x_j})) \Big)_{1\le i,j\le n}.$$

行列式の定義は、(1.4) の第 2 式と同様に理解してもらえばよい。変数 x_j に関する作用素は第 j 列にしか現れないので、行列式の定義は、列の添字の置換で定義しても行の添字の置換で定義しても同じものになることを注意しておく。この行列式を v で展開して、m 次の係数を取り出せば、B_m の表示 (2.4) と A_m の表示 (2.14) が得られる。また、u を t^s に, v を $v/(1-t)$ に置き換えて $t \to 1$ の極限をとれば、(3.5) から Jack の場合の $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{A}_m$ にパラメータを導入した微分作用素の母函数の行列式表示になるが、詳細は省略する。

命題 3.1 の証明はしないが、$q = t$のとき (Macdonald 対称多項式が Schur 函数に落ちる場合) は上の行列式表示が簡単になるので、その場合だけ見ておこう。(次節で、定理 2.1 の証明にこの場合を使う。) 今後、B_m, A_m 等を $q = t$ に特殊化したものを $\mathring{B}_m$, $\mathring{A}_m$ のように上に $\circ$ を乗せて表すことにする。

命題 3.2. $q = t$ と特殊化すると、$\mathring{B}(u,v)$, $\mathring{A}(u,v)$ は次の表示を持つ:

$$\mathring{B}(u,v) = \frac{1}{\Delta(x)} \prod_{j=1}^{n} \bigl(1 + vx_j(1 - uT_{t,x_j})\bigr)\Delta(x), \tag{3.6}$$

$$\mathring{A}(u,v) = \frac{1}{\Delta(x)} \prod_{j=1}^{n} \bigl(1 + \frac{v}{x_j}(1 - uT_{q,x_j})\bigr)\Delta(x).$$

証明. 以下適宜、略記法 $x_J = \prod_{j\in J} x_j$, $T^I_{q,x} = \prod_{i\in I} T_{q,x_i}$ を用いる。まず

$$\frac{T^I_{t,x}(\Delta(x))}{\Delta(x)} = t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{\substack{i\in I \\ j\in[1,n]\setminus I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \tag{3.7}$$

に注意すると、$B(u,v)$ は

$$B(u,v) = \sum_{I\subset J} x_J v^{|J|}(-u)^{|I|} \frac{T^I_{t,x}(\Delta(x))}{\Delta(x)} T^I_{q,x} \tag{3.8}$$

と書ける。$q = t$ のときはこれから、

$$\begin{aligned}
\mathring{B}(u,v) &= \sum_{I\subset J} v^{|J|} x_J\, (-u)^{|I|}\, \frac{T^I_{t,x}(\Delta(x))}{\Delta(x)}\, T^I_{t,x} \\
&= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{J} v^{|J|} x_J \sum_{I\subset J} (-u)^{|I|} T^I_{t,x}\, \Delta(x) \\
&= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{J} v^{|J|} x_J \prod_{j\in J} (1 - uT_{t,x_j})\Delta(x) \\
&= \frac{1}{\Delta(x)} \prod_{j=1}^{n} \bigl(1 + vx_j(1 - uT_{t,x_j})\bigr)\, \Delta(x)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

で、(3.6) を得る。$\mathring{A}(u,v)$ についても同様である。 □

§4: 定理 2.1 の証明.

(2.4) で定義した q 差分作用素 B_m が実際に列型上昇演算子となることの証明を記しておく。基礎となるアイディアは (1.8) の母函数 $\Pi(x,y)$ を用いることである。

$m=0,1,\ldots,n$ として m を固定し、前と同様に変数 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ と変数 $y=(y_1,\ldots,y_m)$ を考える。このとき

$$\Pi(x,y)=\prod_{\substack{i\in[1,n]\\ j\in[1,m]}}\frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty}=\sum_{\ell(\lambda)\le m}b_\lambda P_\lambda(x)P_\lambda(y) \tag{4.1}$$

であった。

補題 4.1. 不変式環 $\mathbb{K}[x]^W$ を保つ作用素 B が与えられたとき、次の 2 条件は同値である。
(a) 長さ m 以下の任意の分割 λ に対して $B.J_\lambda(x)=J_{\lambda+(1^m)}(x)$.
(b) x 変数に作用する B を B_x と書くとき

$$B_x.\Pi(x,y)=\frac{1}{y_1\cdots y_m}D_y(1).\Pi(x,y). \tag{4.2}$$

証明. μ が長さ m 以下の分割のとき、y 側の作用素について

$$\frac{1}{y_1\cdots y_m}D_y(1)P_\mu(y)=P_{\mu-(1^m)}(y)\prod_{i=1}^{m}(1-q^{\mu_i}t^{m-i}) \tag{4.3}$$

で、特に $\ell(\mu)=m$ のときは右辺が 0 となることに注意する。つまりこの作用素は y 変数での m 次の (最高次の) 列型下降演算子である。これと (1.9) の展開を組み合わせると、条件 (b) は長さ m 以下の任意の分割 λ に対して

$$B.P_\lambda(x)=P_{\lambda+(1^m)}(x)\frac{b_{\lambda+(1^m)}}{b_\lambda}\prod_{i=1}^{m}(1-q^{\lambda_i+1}t^{m-i}) \tag{4.4}$$

が成立することと同値であることがわかる。つまり、母函数 $\Pi(x,y)$ を要として、y 側と x 側で下降演算子と上昇演算子が移りあう訳である。後は、(4.4) 式が $J_\lambda(x)$ の正規化の係数と両立すること

$$\frac{c_{\lambda+(1^m)}}{c_\lambda}=\frac{b_{\lambda+(1^m)}}{b_\lambda}\prod_{i=1}^{m}(1-q^{\lambda_i+1}t^{m-i}) \tag{4.5}$$

を定義 (1.7), (1.10) に戻って検証すればよい。 □

注意 4.2. B が条件 (b) を満たすとき、(4.4) が成立することを示すのに b_λ の具体的な表示は必要でない。従って、$B.P_\lambda(x)$ の主係数を B から決定できれば、比 $b_{\lambda+(1^m)}/b_\lambda$ が決まり、帰納的に b_λ が決定できることになる。以下に証明するように (2.4) の q 差分作用素は (b) を満たすので、$B_m.P_\lambda(x)$ の主係数を調べて、この道筋で b_λ を決定することも可能である。

この補題により、定理 2.1 を示すには (2.4) の q 差分作用素 B_m に対して等式

$$B_{m,x}.\Pi(x,y)=\frac{1}{y_1\cdots y_m}D_y(1).\Pi(x,y). \tag{4.6}$$

を証明すればよいことになる。実際に q 差分作用素を作用させてみよう。

$$\prod_{i\in I}T_{q,x_i}\Pi(x,y)=\Pi(x;y)\prod_{i\in I}\prod_{k\in[1,m]}\frac{1-x_iy_k}{1-tx_iy_k} \tag{4.7}$$

等に注意して、(4.6) を $\Pi(x,y)$ で割った等式を書き下すと次のようになる。

(4.8)
$$\sum_{\substack{J\subset[1,n]\\|J|=m}}x_J\sum_{I\subset J}(-t^{m-n+1})^{|I|}t^{\binom{|I|}{2}}\prod_{\substack{i\in I\\j\notin I}}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\prod_{\substack{i\in I\\k\in[1,m]}}\frac{1-x_iy_k}{1-tx_iy_k}$$
$$=\frac{1}{y_1\cdots y_m}\sum_{K\subset[1,m]}(-1)^{|K|}t^{\binom{|K|}{2}}\prod_{\substack{k\in K\\\ell\notin K}}\frac{ty_k-y_\ell}{y_k-y_\ell}\prod_{\substack{i\in[1,n]\\k\in K}}\frac{1-x_iy_k}{1-tx_iy_k}.$$

但し $x_J=\prod_{j\in J}x_j$ と略記した。等式 (4.6) は有理函数の等式 (4.8) と同値な訳であるが、注目すべきことは等式 (4.8) が変数 q を含んでいない (!) ということである。従って、一般の (q,t) で B_m が列型上昇演算子であること ($\Leftrightarrow$ (4.6)) を示すには、q を任意に特殊化して証明すればよい。例えば $q=t$ のとき Macdonald 対称函数は Schur 函数に落ちるので、その場合だけ証明すればよいのである。Schur 函数の場合に我々の B_m が正しく上昇演算子であることを証明すれば、それから (4.8) が従い、従って一般の (q,t) で B_m が上昇演算子であること ($\Leftrightarrow$ (4.6)) が結論づけられる訳である。(この種の還元法は Macdonald の本 [Ma] でも用いられている。)

以下では、$q=t$ の場合を考察することにして、前節と同様に B_m や $\Pi(x,y)$ を $q=t$ に特殊化したものを $\mathring{B}_m$, $\mathring{\Pi}(x,y)$ と書く。この場合 Macdonald 対称函数 $P_\lambda(x)$ は、Schur 函数

$$s_\lambda(x)=\frac{\det(x_j^{\lambda_i+\delta_i})_{1\le i,j\le n}}{\Delta(x)} \tag{4.9}$$

になる。(以下 $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$, $\delta_i=n-i$ $(i=1,\ldots,n)$ とおく。) このとき定理 2.1 の主張は、長さ m 以下の任意の分割 λ に対して

$$\mathring{B}_m\,s_\lambda(x)=s_{\lambda+(1^m)}\prod_{i=1}^m(1-t^{\lambda_i+m-i+1}) \tag{4.10}$$

が成立することを意味するので、これを証明すればよい。命題 3.2 の表示

$$\mathring{B}(u,v)=\frac{1}{\Delta(x)}\prod_{j=1}^n(1+vx_j(1-uT_{q,x_j}))\Delta(x) \tag{4.11}$$

を直接 (4.9) に作用させて計算すると

(4.12)

$$\overset{\circ}{B}(u,v)s_\lambda(x) = \frac{1}{\Delta(x)}\prod_{k=1}^{n}(1+vx_k(1-uT_{t,x_k}))\det(x_j^{\lambda_i+\delta_i})$$
$$= \frac{1}{\Delta(x)}\det(x_j^{\lambda_i+\delta_i}(1+vx_j(1-ut^{\lambda_i+\delta_i})))$$
$$= \frac{1}{\Delta(x)}\sum_{K\subset[1,n]} v^{|K|}\det(x_j^{\lambda_i+\delta_i+\theta_K(i)})\prod_{k\in K}(1-ut^{\lambda_k+\delta_k})$$

となる。ここで θ_K は部分集合 $K\subset[1,n]$ の特性函数で $i\in K$ ならば $\theta_K(i)=1$, $i\notin K$ ならば $\theta_K(i)=0$ と定める。(4.9) の Schur 函数の記法を一般の多重指数 λ まで拡張して用いると、(4.12) は

(4.13) $$\overset{\circ}{B}(u,v)s_\lambda(x) = \sum_{K\subset[1,n]} v^{|K|}s_{\lambda+(1^K)}(x)\prod_{k\in K}(1-ut^{\lambda_k+\delta_k})$$

と書ける。但し $(1^K)=(\theta_K(i))_{1\le i\le n}$. 今 λ が長さ m 以下の分割である仮定すると、

(4.14) $$\lambda+\delta = (\lambda_1+n-1,\dots,\lambda_m+n-m,n-m-1,\dots,0)$$

から、$K\subset[1,m]$ の場合か、$K\cap[m+1,n]=[m+1,m+r]$ ($1\le r\le n-m$) 成立する場合をのぞいて $s_{\lambda+(1^K)}(x)=0$ となることが容易にわかる。さらにパラメータ u を $u=t^{-(n-m-1)}$ と特殊化すると、$K\cap[m+1,n]\neq\emptyset$ なる K に対しては $\prod_{k\in K}(1-ut^{\lambda_k+\delta_k})=0$ となる。従って

(4.15) $$\overset{\circ}{B}(t^{m-n+1},v)s_\lambda(x) = \sum_{K\subset[1,m]} s_{\lambda+(1^K)}(x)\prod_{k\in K}(1-t^{\lambda_k+m-k+1}).$$

すなわち $\ell(\lambda)\le m$ なる任意の分割 λ に対して

(4.16) $$\overset{\circ}{B}_\ell(t^{m-n+1})s_\lambda(x) = \sum_{\substack{K\subset[1,m]\\|K|=\ell}} s_{\lambda+(1^K)}(x)\prod_{k\in K}(1-t^{\lambda_k+m-k+1})$$

が成立することになる。特に

(4.17) $$\overset{\circ}{B}_m(t^{m-n+1})s_\lambda(x) = s_{\lambda+(1^m)}\prod_{i=1}^{m}(1-t^{\lambda_i+m-i+1}),$$
$$\overset{\circ}{B}_\ell(t^{m-n+1})s_\lambda(x) = 0 \quad (\ell>m).$$

この (4.17) は、我々の $\overset{\circ}{B}_m$ が $q=t$ で正しく上昇演算子となっていることを意味する。これで、$q=t$ の場合が示せたので、恒等式 (4.8) も証明できたことになる。これから補題 4.1 を経由して、一般の (q,t) の場合に、(2.4) で定義した B_m が定理 2.1 の性質を持つことが示された訳である。

なお A_m が下降演算子となることも同様の議論で (下降演算子用の補題 4.1 を作り、$q=t$ の場合に帰着することで) 証明できるが、詳細は省略する。

§5: Affine Hecke 環との関係.

最後に、affine Hecke 環との関係を説明し、昇降演算子の q-Dunkl 作用素による表示を与えてこの論説を終りにする。

Hecke 環の記号との衝突を避けるために、以下では q シフトの作用素 T_{q,x_i} を τ_i と記し、$\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$ とおく。x の有理函数を係数とする q 差分作用素環を $\mathcal{D}_{q,x}=\mathbb{K}(x)[\tau]$ で表わし、さらに q 差分作用素と変数の置換 ($W=\mathfrak{S}_n$ の作用) で生成される環 $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ を考えることにしよう。この環の中で、Lusztig 作用素 $T_1,\dots,T_{n-1}\in\mathcal{D}_{q,x}[W]$ を次のように定義する:

$$T_i=t+\frac{1-tx_i/x_{i+1}}{1-x_i/x_{i+1}}(s_i-1)\quad(i=1,\dots,n-1). \tag{5.1}$$

ここで $s_i=(i,i+1)$ は変数 x_i と x_{i+1} の入替えの作用素である。さらに、

$$\omega=s_{n-1}\cdots s_1\tau_1 \tag{5.2}$$

とおいて、T_0 を $T_0=\omega T_1\omega$ で定義する。これらの作用素で定義される $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ の部分環

$$H(\widetilde{W})=\mathbb{K}\langle T_0,T_1,\dots,T_{n-1},\omega^{\pm1}\rangle\subset\mathcal{D}_{q,x}[W] \tag{5.3}$$

が今の場合の affine Hecke 環である。実際これらの作用素は、次の交換関係を見たす:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad (T_i-t)(T_i+1)=0\quad(i=0,1,\dots,n-1)\\
&\text{(b)}\quad T_iT_jT_i=T_jT_iT_j\quad(i-j=\pm1)\\
&\text{(c)}\quad T_iT_j=T_jT_i\quad(i-j\neq\pm1)\\
&\text{(d)}\quad \omega T_i=T_{i-1}\omega\quad(i=0,1,\dots,n-1).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

但し、添字は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元と見なす。部分環 $H(\widetilde{W})$ の生成元の交換関係は、(5.4) でつくされることも解る。

そこで、$H(\widetilde{W})$ に属す作用素 $Y_1,\dots,Y_n$ を次のように定義し、これらを q-Dunkl 作用素と呼ぶ (Cherednik による) :

$$Y_i=t^{-n+2i-1}T_i\cdots T_{n-1}\omega T_1^{-1}\cdots T_{i-1}^{-1}\quad(i=1,\dots,n). \tag{5.5}$$

(定数倍は都合の良いように調整してある。) q-Dunkl 作用素 $Y_1,\dots,Y_n$ は互いに可換であり、$\mathbb{K}[x]$ を保つ作用素となる。同様に $Y_1^*,\dots,Y_n^*$ を

$$Y_i^*=t^{n-2i+1}T_i^{-1}\cdots T_{n-1}^{-1}\omega T_1\cdots T_{i-1}\quad(i=1,\dots,n). \tag{5.6}$$

で定義すると、これらも互いに可換な作用素で $\mathbb{K}[x]$ を保つことが解る。

一般に Q を $\mathcal{D}_{q,x}[W]$ に属す作用素とし、

$$Q = \sum_{w \in W} Q_w w \quad (Q_w \in \mathcal{D}_{q,x}) \tag{5.7}$$

表示するとき、Q に付随する q 差分作用素 $[Q]_{\mathrm{sym}}$ を

$$[Q]_{\mathrm{sym}} = \sum_{w \in W} Q_w \in \mathcal{D}_{q,x} \tag{5.8}$$

で定義しよう。こうすると、$Q \in \mathcal{D}_{q,x}[W]$ が、対称函数 $\varphi(x)$ に作用するときには q 差分作用素 $[Q]_{\mathrm{sym}}$ として作用し、$Q.\varphi(x) = [Q]_{\mathrm{sym}}.\varphi(x)$ が成立することになる。

上で定義した q-Dunkl 作用素と Macdonald の q 差分作用素 $D_x(u)$ の関係は、

$$\left[(1-ut^{n-1}Y_1)(1-ut^{n-2}Y_2)\cdots(1-uY_n)\right]_{\mathrm{sym}} = D_x(u) \tag{5.9}$$

で与えられる。一般に $f(y)$ が n 変数 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ の対称多項式のとき q 差分作用素 L_f を

$$L_f = \left[f(t^{\delta_1}Y_1, \ldots, t^{\delta_n}Y_n)\right]_{\mathrm{sym}} \in \mathcal{D}_{q,x} \tag{5.10}$$

で定義すると、L_f は $\mathbb{K}[x]^W$ を保つ W 不変な q 差分作用素となる。さらに $f, g \in \mathbb{K}[y]^W$ ならば $[L_f, L_g] = 0$ で、L_f $(f \in \mathbb{K}[y]^W)$ は W 不変な q 差分作用素の可換族を与える。Macdonald 対称多項式はこの可換族の同時固有函数であり、任意の分割 λ に対して

$$L_f.P_\lambda(x) = P_\lambda(x) f(q^\lambda t^\delta). \tag{5.11}$$

が成立する。

$m = 0, 1, \ldots, n$ に対し、$\mathcal{D}_{q,x}[W]$ に属す作用素 $\widetilde{B}_m$, $\widetilde{A}_m$ を q-Dunkl 作用素を用いて次のように定義しよう。

(5.12)

$$\widetilde{B}_m = \sum_{k_1 < \cdots < k_m} x_{k_1} \cdots x_{k_m} (1 - t^m Y_{k_1})(1 - t^{m-1} Y_{k_2}) \cdots (1 - t Y_{k_m})$$

$$\widetilde{A}_m = \sum_{k_1 < \cdots < k_m} \frac{1}{x_{k_1} \cdots x_{k_m}} (1 - Y^*_{k_1})(1 - tY^*_{k_2}) \cdots (1 - t^{m-1} Y^*_{k_m})$$

定理 5.1. 各 $m = 0, 1, \ldots, n$ について $\widetilde{B}_m$, $\widetilde{A}_m$ は $\mathbb{K}[x]^W$ を保つ作用素である。さらに、対応する q 差分作用素 $[\widetilde{B}_m]_{\mathrm{sym}}$, $[\widetilde{A}_m]_{\mathrm{sym}}$ は W 不変で、それぞれ (2.4) の B_m, (2.12) の A_m に一致する。

(証明等については、[KN1] の後半を参照されたい。)

以下に Jack の場合の対応物を掲げておく。この場合の Dunkl 作用素として

$$D_i = \lim_{\substack{q=t^\alpha \\ t\to 1}} \frac{1-Y_i}{1-t}, \quad D_i^* = \lim_{\substack{q=t^\alpha \\ t\to 1}} \frac{1-Y_i^*}{1-t} \quad (i=1,\ldots,n) \tag{5.13}$$

を考えよう。このとき上昇演算子 $\mathcal{B}_m$ は

$$D_i = \alpha x_i \partial_{x_i} - \sum_{j<i} \frac{1}{1-x_j/x_i}(s_{ij}-1) + \sum_{j>i} \frac{1}{1-x_i/x_j}(s_{ij}-1) \tag{5.14}$$

を用いて

$$\mathcal{B}_m = \left[\sum_{k_1<\cdots<k_m} x_{k_1}\cdots x_{k_m} (D_{k_1}+m)(D_{k_2}+m-1)\cdots(D_{k_m}+1) \right]_{\mathrm{sym}}. \tag{5.15}$$

また、下降演算子 $\mathcal{A}_m$ は

$$D_i^* = \alpha x_i \partial_{x_i} + \sum_{j<i} \frac{1}{1-x_i/x_j}(s_{ij}-1) - \sum_{j>i} \frac{1}{1-x_j/x_i}(s_{ij}-1) \tag{5.16}$$

用いて

$$\mathcal{A}_m = \left[\sum_{k_1<\cdots<k_m} \frac{1}{x_{k_1}\cdots x_{k_m}} (D_{k_1}^*)(D_{k_2}^*+1)\cdots(D_{k_m}^*+m-1) \right]_{\mathrm{sym}}. \tag{5.17}$$

と表示される。Dunkl 作用素の定義にはいろいろな流儀があるので文献を参照するときには注意が必要であるが、流儀の違いを無視すると、(5.15) が Lapointe-Vinet [LV1,LV2] の生成演算子である。

∫

[KN1] A.N. Kirillov and M. Noumi, *Affine Hecke algebras and raising operators for Macdonald polynomials*, preprint q-alg/9605004 (1996).

[KN2] A.N. Kirillov and M. Noumi, *q-Difference raising operators for Macdonald polynomials and the integrality of transition coefficients*, preprint q-alg/9605005 (1996).

[Ma] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials* (Second Edition), Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press Inc., New York, 1995.

[MN1] K. Mimachi and M. Noumi, *An integral representation of eigenfunctions for Macdonald's q-difference operators*, Tôhoku J. Math. (to appear).

[MN2] K. Mimachi and M. Noumi, *A reproducing kernel for nonsymmetric Macdonald polynomials*, preprint q-alg/9610014 (1996).

[LV1] L. Lapointe and L. Vinet, *A Rodrigues formula for the Jack polynomials and the Macdonald-Stanley conjecture*, preprint CRM-2294 (1995).

[LV2] L. Lapointe and L. Vinet, *Exact operator solution of the Calogero-Sutherland model*, preprint CRM-2272 (1995).

[MY] K. Mimachi and Y. Yamada, *Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials*, Comm. Math. Phys. **174** (1995), 447–455 [数理解析研究所講究録 **919**(1995), 68–78].

[N1] M. Noumi, *Macdonald's symmetric polynomials as zonal spherical functions on some quantum homogeneous spaces*, Adv. in Math. **12** (1996), 16–77.

[N2] 野海正俊, *Macdonald-Koornwinder* 多項式と *affine Hecke* 環, 数理解析研究所講究録 **919** (1995), 44–55.

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kobe University; Rokko, Kobe 657, Japan
E-mail address: noumi@math.s.kobe-u.ac.jp